MATEMÁTICAS III

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS.

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS.

U.N.C.

Profesor titular: *Prof. Dra. Patricia A. Paredes Olivera*

Profesores auxiliares 2011: *Eduardo Perassi*
Paula Bercoff
Cesar Maglione
Christian Negre

Departamento de Matemática y Física, Facultad de Cs. Qcas.
U.N.C., Córdoba, Argentina

Trabajo Práctico 1

Funciones Vectoriales y Parametrización

1.1. Funciones paramétricas. Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

1. Obtener la ecuación rectangular o simétrica de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

a) $x = 8t + 3$; $y = 4t + 2$
b) $x = 2t - 3$; $y = 4t - 1$

2. Obtener la ecuación rectangular de la curva dada por las siguientes ecuaciones y dibujar la curva que representan

a) $x^2 = 3\cos^2\phi$; $y^2 = 3\sin^2\phi$
b) $x = 2\cos t$; $y = 2\sin t$
c) $x = 3(1 - \cos\phi)$; $y = 2\sin\phi$
d) $x = 2t$; $y = \frac{2}{t}$

3. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la curva dada por la siguiente ecuación:

$$x^2 - y - 2x - 3 = 0 \text{ con } x = t + 1$$

4. Determinar la ecuacion vectorial de la recta L que pasa por el punto $(-2, 3, 1)$ y tiene como vector director a $(-5, 0, 4)$.

5. Determinar la ecuacion vectorial de la recta L que pasa por los puntos $\vec{P} = (1, 3, -2)$ y $\vec{Q} = (2, 1, -2)$.

6. Si a, b y c son diferentes de 0, y si son las intercepciones x, y y z, respectivamente, de un plano, demuestre que una ecuación del plano es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Esta es la forma de intercepción de la ecuación de un plano.

7. Si X_0 es el punto del plano $x+y+z=0$ más cercano a $Q=(2,1,1)$ entonces (X_0-Q) es paralelo al vector........................ El punto $P=Q+tN=(2+t,1+t,1+t)$ está en el plano si $t=$............... Entonces $P=X_0=(\ldots,\ldots,\ldots)$ y la menor distancia de Q al plano es ....

1.2. Funciones vectoriales

1. Determinar el dominio de las siguientes funciones vectoriales:

a) $\vec{R}(t)=\frac{1}{t}\ \hat{\imath}+\sqrt{4-t}\ \hat{\jmath}$

b) $\vec{R}(t)=(\cos^{-1}t)\ \hat{\imath}+(\sec^{-1}t)\ \hat{\jmath}$

c) $\vec{R}(t)=\sqrt{t^2-9}\ \hat{\imath}+\ln|t-3|\ \hat{\jmath}+(t^2+2t-8)\ \hat{k}$

d) $\vec{R}(t)=\ln|\sin t|\ \hat{\imath}+\sqrt{16-t^2}\ \hat{\jmath}+\ln|t+4|\ \hat{k}$

2. En los siguientes ejercicios calcule: $(\vec{F}+\vec{G})(t),(\vec{F}-\vec{G})(t),(\vec{F}\bullet\vec{G})(t),(\vec{F}\times\vec{G})(t)$

a) $\vec{F}(t)=(t+1)\ \hat{\imath}+(t^2-1)\ \hat{\jmath}+(t-1)\ \hat{k}$; $\vec{G}(t)=(t-1)\ \hat{\imath}+\hat{\jmath}+(t+1)\ \hat{k}$

b) $\vec{F}(t)=\cos t\ \hat{\imath}+\cos t\ \hat{\jmath}+t\ \hat{k}$; $\vec{G}(t)=\sin t\ \hat{\imath}+\cos t\ \hat{\jmath}-t\ \hat{k}$

3. Calcule: i) $f(t)\vec{F}(t)$, ii) $f(t)\vec{G}(t)$, iii) $(\vec{F}\circ g)(t)$, iv) $(\vec{G}\circ g)(t)$; donde:

a) $\vec{F}$ y $\vec{G}$ son las funciones del punto $2a$; y $f(t)=t-1$, $g(t)=t+1$

b) $\vec{F}$ y $\vec{G}$ son las funciones del punto $2b$; y $f(t)=\sin t$, $g(t)=\sin^{-1}t$

¿Es posible calcular $(g\circ\vec{G})(t)$?

4. Calcule el límite, si existe.

a) $\vec{R}(t)=\frac{t^2-1}{t+1}\ \hat{\imath}+\frac{t+1}{t-1}\ \hat{\jmath}+|t+1|\ \hat{k}$; $\lim_{t\to 1}\vec{R}(t)$

b) $\vec{R}(t)=e^{t+1}\ \hat{\imath}+e^{1-t}\ \hat{\jmath}+(1+t)^{1/t}\ \hat{k}$; $\lim_{t\to 0}\vec{R}(t)$

c) $\vec{R}(t)=\frac{\ln(t+1)}{t}\ \hat{\imath}+\sinh t\ \hat{\jmath}+\cosh t\ \hat{k}$; $\lim_{t\to 0}\vec{R}(t)$

5. Determinar el dominio de la función vectorial

a) $\vec{R}(t)=t^2\ \hat{\imath}+\ln(t-1)\ \hat{\jmath}+\frac{1}{t-2}\ \hat{k}$

b) $\vec{R}(t)=(t-1)\ \hat{\imath}+\frac{1}{e^t-1}\ \hat{\jmath}+\frac{|t-1|}{t-1}\ \hat{k}$

c) $\vec{R}(t)=\begin{cases} e^{-1/t^2}\ \hat{\imath}+t^{2}\hat{}j+\hat{k} & \text{si } t\neq 0\\ \vec{0} & \text{si } t=0\end{cases}$

6. Demuestre para las siguientes funciones $\vec{U}(t)$ y $\vec{V}(t)$, el teorema de limites si $\vec{U}(t)$ y $\vec{V}(t)$ son funciones tales que $\lim_{t\to a}\vec{U}(t)$ y $\lim_{t\to a}\vec{V}(t)$ existen.

a) $\lim_{t\to a}\left[\vec{U}(t)+\vec{V}(t)\right]=\lim_{t\to a}\vec{U}(t)+\lim_{t\to a}\vec{V}(t)$

b) $\lim_{t\to a}\left[\vec{U}(t)\bullet\vec{V}(t)\right]=\lim_{t\to a}\vec{U}(t)\bullet\lim_{t\to a}\vec{V}(t)$

c) $\lim_{t\to a}\left[\vec{U}(t)\times\vec{V}(t)\right]=\lim_{t\to a}\vec{U}(t)\times\lim_{t\to a}\vec{V}(t)$

Ejercicio adicional 1. Demuestre que si la función vectorial $\vec{V}(t)$ es contínua en a, entonces $\|\vec{V}(t)\|$ es contínua en a.

Ejercicio adicional 2. Sea f una función real tal que $\lim_{t\to a} f(t)$ existe. Sea $\vec{V}(t)$ una función vectorial real tal que $\lim_{t\to a}\vec{V}(t)$ existe. Demuestre que:

$$\lim_{t\to a} f(t)\vec{V}(t)=\left[\lim_{t\to a} f(t)\right]\left[\lim_{t\to a}\vec{V}(t)\right] \tag{1.1}$$

Ejercicio adicional 3. Demuestre que la distancia perpendicular entre los planos paralelos $ax+by+cz+d_1=0$ y $ax+by+cz+d_2=0$ está dada por:

$$\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Trabajo Práctico 2

Límite y Continuidad de Funciones de varias variables

1. Determine el dominio de f y dibújelo como una región de $\mathbb{R}^2$. Utilice curvas punteadas para indicar cualquier región de la frontera que no pertenezca al dominio y curvas contínuas para indicar las regiones de la frontera que pertenezcan al dominio.

a) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$

b) $f(x,y) = \frac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$

c) $f(x,y) = \sin^{-1}(x+y)$

d) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

e) $f(x,y) = \ln(xy) - 1$

2. Determine el dominio de f y exprese la región de $\mathbb{R}^3$ que representa. En el caso de ser posible, dibuje la región.

a) $f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{x-y-z}$

b) $f(x,y,z) = xz\cos^{-1}(y^2-1)$

c) $f(x,y,z) = \sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z$

3. Determinar el dominio de f. Dibuje su gráfica. Dibuje un mapa de contornos de f que muestre las curvas de nivel para los números indicados.

a) $f(x,y) = \sqrt{16-x^2-y^2}$, para 0,1,2,3,4

b) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$, para 10,8,6,5 y 0

4. Demuestre las siguientes igualdades determinando una $\delta > 0$ para cualquier $\epsilon > 0$ tal que se cumpla la definición de límite.

a) $\lim_{(x,y)\to(3,2)}(3x-4y) = 1$

b) $\lim_{(x,y)\to(-1,3)}(3x-2y) = -9$

5. Evalúe los límites de las siguientes funciones mediante los teoremas de límites de funciones de una sola variable:

a) $\lim_{(x,y)\to(-2,4)} y^3\sqrt{x^3+2y}$
b) $\lim_{(x,y)\to(2,3)}(3x^2+xy-2y^2)$
c) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^4-(y-1)^4}{x^2+(y-1)^2}$
d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{xy})$
e) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$

6. Demuestre que para las siguientes funciones el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

a) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
b) $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$
c) $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$
d) $f(x,y)=\frac{(x^2y)}{(x^4+y^2)}$

7. Las siguientes funciones son discontinuas en el origen debido que $f(0,0)$ no existe. Determine si la discontinuidad es removible o esencial. Si la discontinuidad es removible, redefina $f(0,0)$ de modo que la nueva función sea contínua en $(0,0)$.

a) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+xy+y^2}$
b) $f(x,y)=\sin\frac{x}{x^2+y^2}$
c) $f(x,y)=\frac{x^3-4xy^2}{x^2+y^2}$

8. Construya una función de dos variables definida para todo $\mathbb{R}^2$ que sea discontínua en el origen, tal que:

a) la discontinuidad sea removible;
b) la discontinuidad sea esencial.

Ejercicio adicional 1. Utilice la definición de límites para describir la siguiente oración: *"$f(x,y,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ es una función contínua en un punto $\vec{X}_0\in\mathbb{R}^3$."*

Ejercicio adicional 2. Dada

$$f(x,y)=\frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

obtener, si es posible, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. En caso de poder obtenerlo, demostrar su existencia utilizando la definición de límites.

Trabajo Práctico 3

Derivadas de funciones escalares

3.1. Derivadas parciales

1. Aplique la definición de derivada parcial para calcular $D_1 f(x,y)$ y $D_2 f(x,y)$ si:

$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2$$

2. Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie:

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{24 - x^2 - y^2}$$

con el plano $y = 2$ en el punto $(2,2,2)$. Grafique.

3. Sea:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demuestre que $f_1(0,0) = 0$ y que $f_2(0,0) = 0$. En base a estos resultados, ¿qué puede decir acerca de la continuidad de $f(x,y)$ en $(0,0)$?

4. Para la función del ejercicio 3), demuestre que

a) $f_1(0,y) = -y$ para toda y

b) $f_2(x,0) = x$ para toda x

5. Sea: $f(x,y) = e^x \sin y + \ln(xy)$. Calcule las siguientes derivadas parciales aplicando la definición.

a) $D_{11} f(x,y)$

b) $D_{12} f(x,y)$

c) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$

Ayuda: Recuerde que $\lim_{h\to 0}(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}) = f'(x)$

6. Calcule $f_{12}(0,0)$ y $f_{21}(0,0)$ para la función del ejercicio 3)

7. Calcule la derivada parcial indicada, considerando todas las variables, excepto una, como constantes y aplicando los teoremas para la derivación ordinaria.

a) $f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}}$; $\quad D_2 f(x,y)$

b) $r = \exp(-\Phi)\cos(\Phi+\phi)$; $\quad \partial r/\partial\Phi$

c) $f(x,y,z) = e^{xyz}\sinh(2z) - e^{xy}\cosh(2z) + \sqrt{x^2+y^2}$; $\quad D_3 f(x,y,z)$

8. Calcule $D_{11}f(x,y)$, $D_{22}f(x,y)$ y compruebe si $D_{12}f(x,y) = D_{21}f(x,y)$ ¿En que casos se cumple la igualdad? En el inciso *d)* solo calcule las derivadas en el punto $(0,0)$.

a) $f(x,y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2}$

b) $f(x,y) = e^{-x/y} + \ln\frac{x}{y}$

c) $f(x,y) = \tan^{-1}(y/x)$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3.2. Regla de la cadena

1. Calcule en cada caso la $\frac{dz}{dt}$

a) $z = \sin(x/y)$, con $x = e^t; y = t^2$

b) $z = e^{3x+2y}$, con $x = \cos t; y = t^2$

c) $z = e^{xy}$, con $y = 3x$, y $x = t$

2. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones repecto a todas sus últimas variables.

a) $z = e^{2\nu}$, con $\nu = \sin(y/x)$

b) $w = \frac{3x-2y}{z^2}$, con $y = \ln(x^2u); z = \sqrt{3-2u}$

c) $w = yx^2 + y^2x$, con $y = e^{2x}; x = \sqrt{z}$

d) $u = e^{ax}(y-z)$, con $y = a\sin x; z = \cos x$

Trabajo Práctico 4

Continuidad y diferenciabilidad. Gradientes y derivadas direccionales

4.1. Diferenciabilidad y Continuidad

1. Demuestre que si $f(x,y)$ es diferenciable en (x_0, y_0), entonces es contínua en (x_0, y_0).

2. Dada:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de $f(x,y)$

b) Calcule $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$, para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Calcule $f_1(0,0)$ y $f_2(0,0)$ utilizando la definición de derivada parcial. Estudie la continuidad de estas derivadas parciales y sus implicaciones en la diferenciabilidad.

c) Estudie la diferenciabilidad de la función en $(0,0)$, calculando el incremento y utilizando la definición de diferenciabilidad.

3. Realize un esquema acerca de como estudiar la diferenciabilidad de una función de varias variables a traves del estudio de su continuidad y del cálculo de sus derivadas parciales.

4.2. Funciones Implícitas

1. Dada la superficie $3x \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{\frac{x}{y}}z = 1$, ¿cuales son las condiciones suficientes para que la ecuación anterior defina implícitamente a la función $z = f(x,y)$? Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial y}{\partial x}$ en $(1,1,1)$.

2. Dada la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 = 2$$

a) Grafique la curva que define la ecuación y establezca en que condiciones esta ecuación define implícitamente a y como función de x y a x como función de y.

b) Demuestre que dicha ecuación define en un entorno del punto $(1,1)$ una función $y = y(x)$.

c) Calcule $y'(1)$ e $y''(1)$.

3. Calcular dz para la ecuación $xyz = x+y+z$ e indicar las condiciones en que esta definido.

4. La ecuación $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$, define a z como función implícita de x y de y, es decir $z = f(x,y)$. Determinar las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en función de las derivadas parciales D_1F y D_2F.

4.3. Derivadas direccionales y gradiente

1. Aplique la definición de la derivada direccional para calcular $D_{\mathbf{U}}f(x,y)$ si $f(x,y) = 12 - x^2 - 4y^2$ y $\vec{U}$ es el vector unitario en la dirección $\frac{\pi}{6}$.

2. Demuestre que si f es diferenciable en (x_0, y_0), entonces $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \bullet \mathbf{u}$

3. Si $f(x,y) = \left(\frac{x^2}{16}\right) + \left(\frac{y^2}{9}\right)$

a) Determine el gradiente de f en $(4,3)$.

b) Utilice el gradiente para calcular la derivada direccional de f en $(4,3)$ en la dirección de $(4,3)$ a $(5,6)$.

c) Dibuje las representaciones del vector $\nabla f(4,3)$ y del vector direccional que tiene su punto inicial en $(4,3)$.

4. *a*) Sea f diferenciable en $\mathbf{p_0} = (1,2)$ y tal que si $w = f(x,y)$, la derivada direccional de w en $\mathbf{p_0}$ en la dirección $\mathbf{p_1} = (2,3)$ es $2\sqrt{2}$ y en la dirección $\mathbf{p_2} = (1,0)$ es -3. Cual es la derivada direccional de w en $\mathbf{p_0}$ en la dirección $(-1,2)$?

b) Ahora sea f diferenciable en $\mathbf{p_0} = (a,b)$ y tal que se conocen las derivadas direccionales de f en $\mathbf{p_0}$ en las direcciones $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$. Pueden conocerse las derivadas en $\mathbf{p_0}$ en cualquier dirección? ¿Que condición sobre $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ permiten hacerlo?

5. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable, su gráfico puede definirse implícitamente como la superficie de nivel S de la función $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ dada por $F(x,y,z) = 0$.

a) Muestre que $\nabla F = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$, el cual es un vector nunca nulo.

b) Encuentre el vector normal y el plano tangente al gráfico de $f(x,y) = xy + y\exp(x)$ en $(x,y) = (1,1)$

6. Encuentre el valor absoluto de la derivada direccional en $(1, 2, 1)$ de la función $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z$ en la dirección normal en $(1, 2, 1)$ a la superficie definida implícitamente por $x - yz^2 + z^3 = 0$.

7. Dadas las siguientes proposiciones que siguen relativas a un campo escalar $f : S \to \mathbb{R}$, siendo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\vec{a}$ un punto interior de S:

a) f es contínuo en $\vec{a}$.

b) f es diferenciable en $\vec{a}$.

c) $f'(\vec{a}; \vec{y})$ existe para todo $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^n$.

d) Existen todas las derivadas parciales de f en un entorno de $\vec{a}$ y son contínuas en $\vec{a}$.

e) $\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \vec{0}$.

f) $f(\vec{x}) = ||\vec{x} - \vec{a}||$ para todo $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$.

completar la siguiente tabla, marcando una cruz ($\times$) en donde corresponde:

IMPLICA SIEMPRE QUE

	a	b	c	d	e	f
a						
b						
c						
d						
e						
f						

Ejercicio adicional 1. Dada una $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, diferenciable en $\vec{X_0}$, encuentre la relación entre la derivada direccional $D_{\vec{U}} f(\vec{X_0})$ y el ángulo entre los vectores $\nabla f(\vec{X_0})$ y $\vec{U}$. Con este resultado demuestre que la derivada direccional solo toma valores entre $-\|\nabla f(\vec{X_0})\|$ y $\|\nabla f(\vec{X_0})\|$.

Ejercicio adicional 2. Dada la ecuación $\sin(x + y) + \sin(y + z) = 1$ indique los puntos donde z se define como función implícita $z = f(x, y)$. Calcule la derivada segunda $D_{12} f$ en función de x, y y z.

Trabajo Práctico 5

Extremos de funciones de dos variables.

5.1. Extremos

1. Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones. Determine la naturaleza de dichos puntos.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 7$

b) $f(x,y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$

2. Calcule los extremos de la funcion 1a) si el dominio de f es la región triangular cerrada cuyos lados estan sobre el eje x, el eje y y la recta $x + y = 5$.

3. Determine los tres números positivos cuya suma sea 24 de modo que su producto sea el mayor posible.

4. Determine los puntos de la superficie $y^2 = 4 + xz$ que esten más cerca al origen y calcule la distancia mínima.

5. Para un conjunto de n puntos x_i minimice la suma de sus distancias al cuadrado hacia un determinado punto x.

5.2. Método de cuadrados mínimos

1. Dados n números distintos $x_1, x_2, ..., x_n$ y otros n números $y_1, y_2, ..., y_n$ (no necesariamente distintos), es en general imposible encontrar una recta $f(x) = ax + b$ que pase por todos los puntos (x_i, y_i) para cada i. No obstante, podemos encontrar una función lineal con la que el error cuadrático total $E(a,b) = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - y_i]^2$ sea mínimo. Determinar los valores de a y b para que eso ocurra.

2. Para la reacción química

$$A \longrightarrow B$$

demuestre que los valores experimentales tabulados como $\frac{[A]_0}{[A]_t}$ a diferentes tiempos responden a la ecuación de velocidad $-\frac{\partial [A]}{\partial t} = k[A]$

Tiempo(minutos)	$\frac{[A]_0}{[A]_t}$
4	1.047
8	1.420
18	2.330
32	4.090
39	6.500
47	8.680

5.3. Multiplicadores de Lagrange

1. Una caja rectangular sin tapa debe tener un volumen $V = 32cm^3$. Determine cuales deben ser las dimensiones de las caras para que su superficie sea mínima.

2. Determine la distancia más corta del punto $(1, -1, -1)$ al plano $x + 4y + 3z = 2$.

3. Obtenga los puntos del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ que esten más cerca del origen, y calcule la distancia mínima.

4. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver el ejercicio 2 de la parte 1.

Ejercicio adicional 1. Hallar la distancia mínima de un punto de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ a la recta $x + y = 4$.

Trabajo Práctico 6

Cambio de coordenadas. Integrales múltiples

6.1. Cambio de coordenadas

1. Sea R la región en el plano comprendida entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

a) Grafique R en un sistema de coordenadas cartesiano.

b) Efectúe un cambio de coordenadas a coordenadas polares de las curvas $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

c) Grafique las curvas halladas en el item anterior en un sistema de coordenadas polares.

d) Grafique R en un sistema de coordenadas polares.

2. Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para cada una de las siguientes superficies cuyas expresiones se han dado en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) o en coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ). Grafique la superficie en un sistema de coordenadas cartesiano.

a) $r = 6 \sin \theta$

b) $\rho = c, \qquad c > 0$

c) $\phi = c, \qquad 0 < c < \pi$

3. Identifique las siguientes superficies dadas en coordenadas cartesianas y obtenga la ecuación correspondiente en coordenadas cilíndricas o esféricas, según resulte más conveniente.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

b) $x^2 + y^2 = z^2$

c) $x^2 + y^2 = 16$

d) $x^2 + y^2 = z$

4. Dada la superficie $\frac{x^2}{9} + y^2 + z^2 - 4z = 0$, *a*) Grafique la superficie en un sistema de coordenadas cartesiano.

b) Obtenga la ecuación de la superficie en un coordenadas esféricas. ¿ Es posible graficar en este sistema de coordenadas?

c) Proponga un sistema de coordenadas que le permita realizar la gráfica más sencilla de la superficie.

6.2. Integrales dobles

1. Usando la definición de integral doble como límite de las sumas de Riemann, calcule en forma aproximada:

$$\iint_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \text{donde } f(x,y) = x{+}4y \qquad \text{y} \qquad B = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq 1\}$$

NOTA: Como ejercicio adicional resuelva el problema en forma exacta.

2. Calcule mediante integral doble el área de la región del plano limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$.

3. Exprese como una integral doble y una integral iterada la medida del volumen del sólido que se encuentra por arriba del plano xy delimitado por el paraboloide elíptico $z = x^2{+}4y^2$ y el cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$.

4. Dibuje la región de integración y escriba la integral equivalente con el orden de integración invertido. Calcule ambas integrales.

a) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

b) $\int_{-2}^{1} \int_{x^2+4x}^{3x+2} \; \mathrm{d}y\mathrm{d}x$

5. Transforme las siguientes integrales cartesianas a polares y calcule las últimas:

a) $\int_0^2 \int_0^x y \; \mathrm{d}y\mathrm{d}x$

b) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{(4-x^2)}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \; \mathrm{d}y\mathrm{d}x$

6. La cantidad de lluvia que cae sobre un punto (x, y) durante un año es $f(x, y)$ centímetros. Sea R cierta región geográfica y suponga que las áreas se miden en cm^2.

a) ¿Qué representa $f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$?

b) ¿Qué representa $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A$?

c) ¿Qué representa $\frac{\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A}{\iint_R \mathrm{d}A}$?

d) Suponga que R se divide en dos subregiones disjuntas R_1 y R_2. Si

$$\frac{\iint_{R_1} f(x,y)\mathrm{d}A}{\iint_{R_1} \mathrm{d}A} = p_1, \qquad \frac{\iint_{R_2} f(x,y)\mathrm{d}A}{\iint_{R_2} \mathrm{d}A} = p_2,$$

y las áreas R_1 y R_2 son A_1 y A_2, respectivamente, encuentre una expresión para

$$\frac{\iint_{R} f(x,y)\mathrm{d}A}{\iint_{R} \mathrm{d}A},$$

e) Haga un breve análisis de las unidades halladas en los puntos anteriores.

7. Se distribuye una carga eléctrica en el disco unitario $x^2+y^2 \leq 1$ de manera que la densidad de carga en (x,y) es $\sigma(x,y) = 1 + x^2 + y^2$. Encuentre la carga total del disco

8. *a*) Se define la integral impropia (en el plano completo $\mathbb{R}^2$) como:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}A = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{a\to\infty} \iint_{D(a,(0,0))} f(x,y)\mathrm{d}A$$

en donde $D(a,(0,0))$ es el disco de radio a y centro en el origen, siempre que este límite exista. Demuestre que:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}A = \pi$$

b) Una definición equivalente de la integral impropia de la parte (*a*) es

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}A = \lim_{a\to\infty} \int_{S_a} f(x,y)\mathrm{d}A$$

en donde S_a es el cuadrado de vértices $(\pm a,\ \pm a)$. Use esto para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \pi$$

c) Deduzca que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$

9. Calcule el volumen del sólido que se encuentra por arriba del plano xy delimitado por el paraboloide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ y el cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$, evaluando la integral iterada obtenida en el ejercicio **3**.

6.3. Área de una superficie

1. Dada una superficie S definida como $z = f(x,y)$, si f y sus primeras derivadas parciales son continuas en la región cerrada R de $\mathbb{R}^2$ entonces la integral doble puede emplearse para determinar el área σ de la porción de la superficie que se encuentra sobre esa región cerrada R del plano xy, como:

$$\sigma = \iint\limits_R \sqrt{{f_x}^2(x,y) + {f_y}^2(x,y) + 1}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

a) Demuestre este teorema considerando n particiones rectangulares de R, tales que la i-ésima subregión tenga dimensiones $\Delta_i x$ unidades y $\Delta_i y$ unidades y un área de $\Delta_i A$ unidades cuadradas. Establezca un número $\Delta_i \sigma$ que sea una aproximación del área de la porción de la superficie que se encuentra sobre el i-ésimo rectángulo, teniendo en cuenta que puede ser calculado como:

$$\Delta_i \sigma = \|\vec{A} \times \vec{B}\|$$

donde $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son los vectores que forman los lados adyacentes del paralelogramo en cuestión, paralelos a los ejes x e y, respectivamente.
Por último plantee la expresión de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que le permita encontrar el número $\Delta_i \sigma$ y calcular el área superficial σ.

b) Obtenga el área de la superficie cortada en el cilindro $x^2 + y^2 = 25$ por los planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 1$ y $z = 3$.

c) Obtenga el área de la porción de superficie del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ que esta dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

d) Calcule el área de la porción de superficie del cono $x^2 + y^2 = z^2$ ubicada entre el plano $x - y = 2$ y $y^2 = x$.

2. *a*) Demuestre que para una superficie S definida implícitamente como $F(x, y, z) = 0$ y tal que S puede proyectarse en forma uno a uno sobre el plano xy de modo que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ defina a z como función de x e y, siendo esta $z = f(x, y)$, entonces el área $A(S)$ de dicha superficie es:

$$A(S) = \iint_T \frac{\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

en los puntos en los que $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

b) Calcule el área de un hemisferio S de una esfera de radio a y centro en el origen, mediante la representación implícita $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

6.4. Integrales triples

1. Dibuje el dominio de integración de la integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_{0}^{1-y} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

y escriba todas las posibles integrales iteradas.

2. Teorema del cambio de variables en integrales triples: *Sea* $(x, y, z) = \Phi(u, v, w) = (\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w))$, *un cambio de variables de clase* C^1 *que transforma* $(u, v, w) \in E$ *en* $(x, y, z) \in D = \Phi(E)$. *Si el jacobiano*

$$J(u, v, w) = det \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v & \alpha_w \\ \beta_u & \beta_v & \beta_w \\ \gamma_u & \gamma_v & \gamma_w \end{pmatrix} \neq 0,$$

en el interior de E, entonces para toda función contínua f en D se cumple que:

$$\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{E=\Phi^{-1}} f(\alpha(u,v,w),\beta(u,v,w),\gamma(u,v,w))|J(u,v,w)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

a) Aplique el teorema para el caso de las integrales dobles en coordenadas polares.

b) Calcule el volumen del elipsoide: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3. Calcule los siguientes volúmenes en coordenadas cilíndricas:

a) Cilindro circular de altura h y radio a.

b) Cono circular de altura h y radio de la base a.

4. Halle el volumen determinado en la esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$ por el cilindro $x^2+y^2=a^2$, en coordenadas cilíndricas.

5. Halle el volumen del sólido acotado por arriba por la esfera $\rho = a$ y por abajo por el cono $\phi = \frac{\pi}{3}$ trabajando en coordenadas esféricas.

6. Calcule el volumen seccionado en la esfera $\rho = a$ por los planos $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$, planteando las integrales en coordenadas esféricas.

Ejercicio adicional 1. Encuentre, usando integrales dobles o triples, el volumen del sólido bajo el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y arriba del anillo en el plano xy dado por la ecuación $4 \leq x^2+y^2 \leq 25$.

Ejercicio adicional 2. Sea B una esfera de radio a y centro en el origen, con una densidad δ en cada uno de sus puntos (x,y,z) proporcional a la distancia del punto al origen, con una constante de proporcionalidad k. Encuentre la masa total de la esfera.

Ejercicio adicional 3. Demostrar que el área de la porción de superficie del cono $z = r$ que se encuentra por encima de la región R en el plano xy es igual a $\sqrt{2}\iint_R \mathrm{d}A$

Trabajo Práctico 7

Introducción al cálculo de campos vectoriales.

7.1. Campos vectoriales

1. Graficar las representaciones, que tienen un punto inicial (x, y), de los vectores contenidos en el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$$

donde $x = \pm1, \pm2$ e $y = \pm1, \pm2$. Demostrar que cada una de las representaciones es tangente a una circunferencia con centro en el origen y con una longitud igual al radio de la circunferencia.

2. Dado un campo vectorial bidimensional

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$$

en el que las derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ son continuas en un conjunto abierto S. Si $\vec{F}$ es el gradiente de un cierto potencial ϕ, demostrar que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en cada punto de S. ¿Es esta una condición suficiente para que un campo vectorial sea un gradiente? ¿En que caso las condiciones necesarias de este teorema se vuelven suficientes?

3. Determine si el campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^x \sin z + 2yz)\,\mathbf{i} + (2xz + 2y)\,\mathbf{j} + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2)\,\mathbf{k}$$

es un gradiente $\vec{\nabla} f(x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$. Si lo es, entonces obtenga $f(x, y, z)$.

4. En $\mathbb{R}^3$ consideremos $\vec{r}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, y sea $r(x, y, z) = \|\vec{r}(x, y, z)\|$.

a) Demostrar que $\vec{\nabla} r(x, y, z)$ es un vector unidad en la dirección de $\vec{r}(x, y, z)$.

b) Demostrar que $\vec{\nabla}(r^n) = nr^{n-2}\vec{r}$, si n es un entero positivo.

c) ¿Es válida la fórmula del apartado anterior cuando n es entero negativo o cero?

d) Si el potencial es $\phi(x, y, z) = r^n$, indique la forma de las superficies equipotenciales y del campo vectorial correspondiente.

e) Encuentre las expresiones para los campos gravitacional y electrostático, junto con sus potenciales y las expresiones que los relacionan. ¿A qué tipo de campos corresponden?

5. Un campo de fuerzas radial o "central" $\vec{F}$ en el plano puede expresarse en la forma $\vec{F}(x, y) = f(r)\vec{r}$ en donde $\vec{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ y $r = \|\vec{r}\|$. Si $f(r)$ es continuo en $\mathbb{R}^2$, demostrar que un tal campo de fuerzas $\vec{F}$ es conservativo.

6. Calcule el rotacional $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ y la divergencia $\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla} \bullet \vec{F}$ para los campos vectoriales que se indican:

a) $\vec{F}(x, y) = -\frac{y}{x}\,\mathbf{i} + \frac{1}{x}\,\mathbf{j}$

b) $\vec{F}(x, y, z) = xz^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + x^2z\,\mathbf{k}$

7. Demuestre que si un campo vectorial procede del gradiente de un campo escalar, entonces dicho campo vectorial tiene rotacional nulo. ¿Es correcto afirmar que un campo vectorial con rotacional nulo es el gradiente de un campo escalar? ¿Cual es el nombre de este tipo de campos? ¿ Cuál es la expresión para la divergencia de los mismos?

8. Demuestre que la función escalar $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ es armónica, calculando su laplaciano $\vec{\nabla}^2 f = \vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} f)$.

7.2. Integrales de línea

1. Una partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde el punto $(-1, 1)$ hasta el punto $(2, 4)$. Calcule el trabajo total realizado si el movimiento es provocado por el campo de fuerza $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\,\mathbf{i} + 3x^2y\,\mathbf{j}$. Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en Newtons.

2. Evalúe la integral de línea

$$\int_C 4xy\mathrm{d}x + (2x^2 - 3xy)\mathrm{d}y$$

si la curva C consiste en el segmento de recta de $(-3, -2)$ a $(1, 0)$ y el arco del primer cuadrante de la circunferencia $x^2+y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ recorrido en sentido antihorario.

3. Una partícula recorre la curva cúbica alabeada:

$$\vec{R}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Calcule el trabajo total efectuado si el movimiento es causado por el campo de fuerza:

$$\vec{F}(x,y,z) = e^x\,\mathbf{i} + xe^z\,\mathbf{j} + x\sin(\pi y^2)\,\mathbf{k}$$

Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en Newtons.

4. Calcule la integral de línea para el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = xz\mathbf{j} + 2xy\mathbf{k}$ si la trayectoria es una circunferencia de radio 1 centrada en el origen, que se halla en el plano yz.

5. Dado un campo vectorial conservativo $\vec{F}$, es decir un campo vectorial tal que $\vec{F} = \vec{\nabla}\Phi$ continuo en un disco abierto de $\mathbb{R}^n$:

a) Demostrar que la integral de línea $\int_C \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{R}$ es independiente del camino y encontrar su expresión en función del potencial.

b) En base a lo hallado en el item anterior, demuestre que la integral de línea de $\vec{F}$ alrededor de todo camino cerrado regular a trozos es nula.

6. Dada la función vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = 2x\,\mathbf{i} + 3y^2\,\mathbf{j} + \,\mathbf{k}$$

a) Calcule la integral de línea de $\vec{F}$ si C es la traza del elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$ en el plano xz, desde la parte positivia del eje x hasta la parte positiva del eje z.

b) Demuestre que $\vec{F}$ es un campo conservativo.

c) Calcule la integral de línea en función de los potenciales.

7. Sea un campo de fuerzas conservativo de forma que $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi$, donde Φ es la energía potencial. Supongamos que una partícula de masa constante $m = k$ se mueve en este campo. Si A y B son dos puntos cualesquiera del espacio, demostrar que:

$$\Phi(\vec{A}) + \frac{mv_A^2}{2} = \Phi(\vec{B}) + \frac{mv_B^2}{2}$$

donde v_A yv_B son los módulos de las velocidades de las partículas.

7.3. Teorema de Green

1. Aplique el teorema de Green para evaluar la integral

$$\oint_C y^2\mathrm{d}x + 4xy\mathrm{d}y$$

donde C es la curva cerrada que consiste del arco de parábola $y = x^2$ desde el origen hasta el punto $(2,4)$ y el segmento de recta desde el punto $(2,4)$ hasta el origen. Corrobore que se cumple el teorema calculando el valor de la integral de línea.

2. Utilice el teorema de Green para calcular el área de las siguientes regiones:

a) La región cuya frontera es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) La región acotada por la parábola $y = x^2$ y por la curva $y = \sqrt{x}$.

3. Utilice el teorema de Green para calcular el trabajo total realizado al mover una vez un objeto en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj alrededor de la curva C si el movimiento es causado por el campo de fuerza $\vec{F}(x, y)$.

a) C consiste en la mitad superior de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ y el intervalo $[-2, 2]$ sobre el eje x;
$\vec{F}(x, y) = (xy + y^2)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$

b) C es el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$;
$\vec{F}(x, y) = (e^{x^2} + y^2)\,\mathbf{i} + (e^{y^2} + x^2)\,\mathbf{j}$

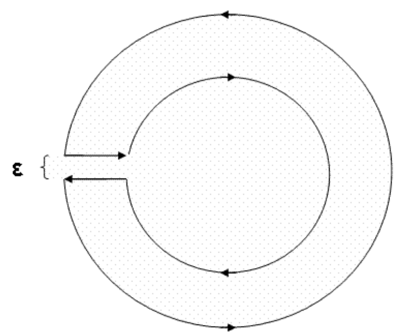
Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en Newtons.

Ejercicio adicional 1. Sea $ds = |r'|dt$ el diferencial de trayectoria de una curva suave a tramos. Por definición se tiene que $r' = (\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t})$. Con ayuda de las definiciones anteriores demuestre que la longitud de una trayectoria circular de radio a vale $2\pi a$.

Ejercicio adicional 2. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$. Grafique D y divídalo en dos regiones acotadas por sendas curvas cerradas simples. Aplique el teorema de Green a estas dos regiones para demostrar que para $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$, con P y Q derivable con continuidad en D, se cumple

$$\int_{C_b} \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{R} - \int_{C_a} \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{R} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

donde C_a y C_b son las circunferencias de radios a y b respectivamente, con la orientación en el sentido antihorario. Ayuda: Piense en un esquema de trayectorias como el de la siguiente figura donde $\epsilon \to 0$.



Trabajo Práctico 8

Introducción al cálculo de campos vectoriales II.

8.1. Integrales de superficie

1. Evalúe la integral de superficie $\iint_S G(x,y,z)\mathrm{d}\sigma$ en los siguientes casos:

a) $G(x,y,z) = z,\ S$ es la superficie de la semiesfera $x^2+y^2+z^2=4$ que se encuentra por encima del plano xy.

b) $G(x,y,z) = xyz,\ S$ es la porción del cilindro $x^2+z^2=4$ que se encuentra entre los planos $y=1$ e $y=3$.

c) $G(x,y,z) = x^2,\ S$ es la superficie de la semiesfera $x^2+y^2+z^2=9$ que esta arriba del plano xy.

2. *a*) Calcule la masa de la porción del plano $x+y+z=1$ que se encuentra en el primer octante si la densidad superficial en cualquier punto (x,y,z) de la misma es $kx^2\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}$, donde k es una constante.

b) Dado un sólido cuya densidad superficial es $\rho(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, con k constante, calcular la masa de la superficie S formada por la parte superior de la esfera de radio 4, centrada en el origen, que se ubica por arriba de la región limitada por la circunferencia $x^2+y^2=1$.

3. *a*) El campo de velocidad de un fluido esta dado por

$$\vec{F}(x,y,z) = 3x\,\mathbf{i} + 3y\,\mathbf{j} + 6z\,\mathbf{k}.$$

Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie de la porción del paraboloide $z = 4-x^2-y^2$ ubicada por encima del plano xy.

b) Sean S la superficie formada por el paraboloide $z=9-x^2-y^2$ sobre el plano xy, y

$$\vec{F}(x,y,z) = (2-x^2-y^2)\,\mathbf{k}$$

un campo vectorial. Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de S. Indique si el signo del flujo se debe a la dirección del campo vectorial $\vec{F}$ y si dicho signo cambiará cuando la superficie que se atraviese sea la del paraboloide $z = x^2 + y^2 - 9$ por debajo del plano xy.

8.2. Teorema de la divergencia de Gauss

1. Evaluar el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2})\,\mathbf{j} + \sin xy\,\mathbf{k}$$

a través de la superficie frontera de la región E acotada por el cilindro parabólico $z = 1-x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$ usando el teorema de la divergencia de Gauss.

2. Verifique el teorema de la divergencia para el campo vectorial $\vec{F} = \|\vec{r}\|\,\vec{r}$ y la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

3. Calcule, usando el teorema de la divergencia, el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (e^{\sin xz} + \tan z)\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$ a través del semielipsoide superio $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$, $z \geq 0$ con su normal apuntando hacia arriba.

4. Demostrar que si E es una región en $\mathbb{R}^3$ limitada por una superficie S, donde tanto E como S cumplen las condiciones del teorema de la divergencia, entonces

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \bullet \vec{N} \mathrm{d}\sigma = 0$$

para cualquier campo vectorial $\vec{F}$ con derivadas parciales de segundo orden continuas.

8.3. Teorema de Stokes

1. Verifique el teorema de Stokes para el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = 3y\,\mathbf{i} + 4z\,\mathbf{j} + 6x\,\mathbf{k}$$

y la parte de la superficie paraboloidal $z = 9 - x^2 - y^2$ ubicada sobre el plano xy y orientada hacia arriba.

2. Utilice el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea $\oint_C \vec{F} \bullet \vec{T} \mathrm{d}s$ si

a) $\vec{F}(x, y, z) = y^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ y S es la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ ubicado por debajo del plano $z = 1$;

b) $\vec{F}(x, y, z) = 4y\,\mathbf{i} + 3z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ y C es el triángulo cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$;

c) $\vec{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y C es la circunferencia de radio 4 centrada en el origen y sobre el plano xy.

3. Calcule la circulación del campo de velocidades de un fluido

$$\vec{F}(x,y,z) = \arctan x^2\,\mathbf{i} + 3x\,\mathbf{j} + e^{3z}\tan z\,\mathbf{k}$$

a lo largo de la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ con el cilindro $x^2+y^2=1$, con $z>0$.

4. Plantee, sin resolver y usando el teorema de Stokes, 2 posibles estrategias que le permitan evaluar de manera más sencilla la integral del rotacional del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = xyz\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + x^2yz\,\mathbf{k}$ sobre el dominio S consistente en la unión de la parte superior y de las 4 caras laterales (pero no el fondo) del cubo con vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$, orientado hacia afuera.

5. Demuestre el teorema del ejercicio 4) de la sección anterior, utilizando el teorema de Stokes.

Ejercicio adicional 1. Calcule el área de la superficie de una esfera de radio a. Con este resultado demuestre que el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = f(\|\vec{r}\|)\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

es igual a $4\pi a^2 f(a)$

Ejercicio adicional 2. Demostrar el siguiente resultado, de importancia trascendente en electromagnetismo. Sea E una región simple sólida en $\mathbb{R}^3$ y S su frontera y sea $\mathbf{r}$ el vector posición (x,y,z), entonces:

$$\iint_S \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{cases} 4\pi & \text{si } (0,0,0)\in S \\ 0 & \text{si } (0,0,0)\notin S \end{cases}$$

(Ayuda: Notar que si el origen pertenece a E no podemos aplicar el teorema de la divergenecia, pues el campo vectorial no es suave allí. Aplicar el teorema de la divergencia a toda la región salvo una pequeña bola de radio ϵ centrada en el origen, y luega calcular el flujo sobre la frontera de esta última.)

Índice general