Ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Escriba la ecuación del método de Euler y derive de allí con la expansión de Taylor un método con un orden de error mayor para la ecuación 1.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

Si se aproxima la derivada con la fórmula hacia adelante, tenemos

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h) = f(x, y) \tag{2}$$

Despejando,

$$y_{n+1} = y_n + hf(x, y) + O(h^2) \tag{3}$$

Ésta es la fórmula de Euler. Para obtener un método de mayor orden, aproximamos y_{n+1} con un polinomio de Taylor alrededor de $x_0 = n$:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + O(h^3) \tag{4}$$

Recordando que

$$y'_n = \frac{dy}{dx} = f(x_n, y_n) \tag{5}$$

y sabiendo que

$$y''_n = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f \tag{6}$$

podemos reemplazar en 4 para obtener:

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2!}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f\right] + O(h^3) \tag{7}$$

2. Cuando conocemos la forma analítica de $f(x, y)$ y es suficientemente simple como para diferenciarla, podemos utilizar los métodos Euler o Taylor; de lo contrario podemos utilizar el método de Adams-Bashforth. Derive la expresión de Adams-Bashforth de dos pasos.

Para derivar fórmulas que relacionen y_{n+1} con puntos anteriores, podemos integrar un paso de la ecuación diferencial de forma exacta:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{8}$$

$$dy = f(x, y)dx$$

$$\int_{y_n}^{y_{n+1}} dy = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$$

$$y|_n^{n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \tag{9}$$

Suponiendo una interpolación lineal de f en el intervalo,

$$\frac{f_n - f}{x_n - x} = \frac{f - f_{n-1}}{x - x_{n-1}} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
(x - x_{n-1})(f_n - f) &= (x_n - x)(f - f_{n-1}) \\
f_n(x - x_{n-1}) - f(x - x_{n-1}) &= f(x_n - x) - f_{n-1}(x_n - x) \\
f_n(x - x_{n-1}) + f_{n-1}(x_n - x) &= f(x_n - x + x - x_{n-1}) \\
f_n(x - x_{n-1}) + f_{n-1}(x_n - x) &= f(x_n - x_{n-1}) \\
f_n(x - x_{n-1}) + f_{n-1}(x_n - x) &= fh
\end{aligned}$$

$$f = \frac{x - x_{n-1}}{h} f_n + \frac{x_n - x}{h} f_{n-1} \tag{11}$$

3. Deduzca los métodos de Runge-Kutta de segundo orden.

   Si se aproxima la función f por su expansión en series de Taylor alrededor de $x_0 = x_{n+1/2}$ (es decir, en el medio de los límites de integración), obtenemos

$$f = f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) + (x - x_{n+1/2}) f'(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) + O(x^2) \tag{12}$$

   Así,

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \\
&= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} [f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) + (x - x_{n+1/2}) f'(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) + O(x^2)]dx \\
&= y_n + f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) x|_{x_n}^{x_{n+1}} + f'(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) \frac{(x - x_{n+1/2})^2}{2}|_{x_n}^{x_{n+1}} + O(x^3) \\
&= y_n + hf(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) + O(x^3)
\end{aligned} \tag{13}$$

   Para obtener el valor de $y_{n+1/2}$, podemos aproximarlo con el método de Euler:

$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \tag{14}$$

   Así,

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_{n+1/2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right) + O(x^3) \tag{15}$$

y si definimos

$$hf(x_n, y_n) = k \tag{16}$$

y recordando que

$$x_{n+1/2} = x_n + \frac{h}{2} \tag{17}$$

nos queda

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k}{2}\right) + O(x^3) \tag{18}$$